

20 Непустота спектра линейного оператора.
 Принадлежность нуля к спектру вполне непрерывного оператора, единственность предельной точки у спектра вполне непрерывного оператора

$\Downarrow$ $A \in L(H \rightarrow H)$, H -м.л., $D(A) = H$. Тогда спектр $\sigma(A) \neq \emptyset$.
 (От противного) $\neg \sigma(A) = \emptyset \Rightarrow \sigma(A) \cup \rho(A) \neq \rho(A) = \mathbb{C}$, т.е. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ — регул. т., т.е. резольвента $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)$.
 $\nexists f(A) = (R_\lambda x, y)$, $\forall x, y \in H$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Покажем, что f — аналит. ф-ция:
 $f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda) = (R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda)x, y = \int_0^1 \text{тогда-то Тильдера:}$
 $R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda = (\lambda + \Delta\lambda - \lambda) R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda = \Delta\lambda (R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda)$
 $f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda) = \int_0^1 R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda = (R_{\lambda+\Delta\lambda} + R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda) R_\lambda = (R_{\lambda+\Delta\lambda}^2 x, y) + ((R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda) R_\lambda x, y)$
 $|((R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda) R_\lambda x, y)| \leq \|R_{\lambda+\Delta\lambda} - R_\lambda\| \|R_\lambda\| \|x\| \|y\| \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} 0$
 (в силу ∇) $\Rightarrow f(\lambda)$ — дифференцируема в $\forall m. \lambda \Rightarrow f(\lambda)$ — аналит. $\Rightarrow f(\lambda)$ — целая ф-ция.
 $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1} = -\lambda^{-1} (E - \frac{A}{\lambda})^{-1} \Rightarrow \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \|\frac{A}{\lambda}\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0$
 $\Rightarrow |f(\lambda)| = |(R_\lambda x, y)| \leq \|R_\lambda\| \|x\| \|y\| \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0 (*)$
 $f(\lambda)$ — целая и $\text{огр} \Rightarrow \int \text{лишняя}$ $\Rightarrow f(\lambda) = \text{const}$
 Т.к. $(*)$, то $f(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow (R_\lambda x, y) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H \Rightarrow \int y = R_\lambda x$
 $\Rightarrow R_\lambda x = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in H$. Возможная на $(A - \lambda E) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (!?) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$

Спектр вполне непр. оп-ра

$A \neq 0$ — регул. т., if $\ker(A - \lambda E) = \emptyset$ (Усл-е $R(A - \lambda E) = X$ ($A: X \rightarrow X$) вступает в силу из ∇ Фредг: ур-е $Lx = y$ (где $L = E - A$, A — вполне непр.) разрешимо однозначно д/в прав. части $\Leftrightarrow \ker L = \emptyset$)

$\Downarrow$ If A — вполне непр., $A: H \rightarrow H$ -м.л., $\lambda \in \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$, то λ — с.зн.

$\blacktriangle \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \nexists \lambda \in \rho(A) \Rightarrow \ker(A - \lambda E) \neq \emptyset \Rightarrow \lambda$ — с.зн.

$\Downarrow$ A — вполне непр., $A: H \rightarrow H$ -м.л. Тогда $\lambda = 0$ — т. спектра A .
 (От противного) $\neg \lambda = 0$ — регул. т. $\Rightarrow \ker A = \emptyset, R(A) = H$ (т.е. ур-е разрешимо однозначно д/в прав. части (из ∇ Фредг))
 $\Rightarrow A$ — б.р., $A: H \rightarrow H$ взаимно однозначно, $R(A) = H \Rightarrow \int$ Банаха об обрат. оп-ре $\Rightarrow \exists A^{-1}$ — б.р., $(A^{-1})^* A^* = E$.

Возьмем полную екс: $e_n, n=1, \dots$. Известно, что $e_n \rightarrow 0, A^* e_n = e_n$. A — вполне непр. $\Rightarrow A e_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. A^{-1} — м.н. оп. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}(Ae_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, но $\|e_n\|=1 \Rightarrow (!?) \Rightarrow A$ не регул. т. $\Rightarrow A$ - т. спектра ■

⇓ $\square$ A - вполне непр., $A: H \rightarrow H$ - линейн., A_n - с. з. н. A , $A_n \neq 0$, $\forall n=1, \infty$. Тогда $|A_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

▲ 1. $\square$ все A_n различны ($\dim \ker(A - A_n E) < \infty \Rightarrow$ выкинем повторяющиеся A_n и соотв. им e_n -ты, без огр. общности) $\Rightarrow A_n \neq A_k$, $n \neq k$, $A A_n = A_n A_n$, $A_n \neq 0$.

2. Все A_n - линейно независ. Предположим, что это не так $\Rightarrow \exists \{ \alpha_i \}$ - не тривиал. и $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n = 0$, $|(A - A_n E)|$
 $\alpha_1 (A_1 - A_n) A_1 + \alpha_2 (A_2 - A_n) A_2 + \dots + \alpha_{n-1} (A_{n-1} - A_n) A_{n-1} = 0$ $|(A - A_{n-1} E)|$
 $\alpha_1 (A_1 - A_n) (A_1 - A_{n-1}) A_1 + \dots + \alpha_{n-2} (A_{n-2} - A_n) (A_{n-2} - A_{n-1}) A_{n-2} = 0$ и т.д.

$\alpha_1 (A_1 - A_n) (A_1 - A_{n-1}) \dots (A_1 - A_2) A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow (!?) \Rightarrow \{ A_n \}$ - линейно независ.

3. Будем проводить процесс ортогонализации.

$\square e_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|}$, $y_2 = A_2 - (A_2, e_1) e_1$, $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$ (if $y_2 = 0$, то $y_2 = A_3 - (A_3, e_1) e_1$)

и т.д. $\Rightarrow \{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ - ОНС

$(A - A_n E) e_n + A_n e_n = A e_n$

$(A - A_n E) e_n \perp e_n \Rightarrow \{ A_n \}$ - "ортогональны" $\Rightarrow \| (A - A_n E) e_n \|^2 + |A_n|^2 = \| A e_n \|^2$

Известно, что $e_n \rightarrow 0$, A - вполне непр. $\Rightarrow \| A e_n \|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |A_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ■